

# Análise Matemática IV

## Problemas para as Aulas Práticas

### Semana 2

- Estabeleça as seguintes identidades (onde  $z = x + iy$ ):
  - $\cos(iz) = \cosh(z)$ ;
  - $\sin(iz) = i \sinh z$ ;
  - $|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = \cosh(2y)$ ;
  - $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ ;
  - $\sin(z + w) = \sin z \cdot \cos w + \cos z \cdot \sin w$ ;
  - $\cosh^2 z + \sinh^2 z = \cosh(2z)$ .
- Calcule o valor principal (i.e., tomando na função  $\log z$  o ângulo correspondente à restrição principal) de:
  - $\log(-i)$ ;
  - $\log(1 - i)$ ;
  - $i^i$ ;
  - $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$ .
- Determine todas as soluções das seguintes equações:
  - $e^z = 2$
  - $e^{iz} + e^{-iz} + 2 = 0$
  - $\log z = 1 + 2\pi i$
  - $\sin(2z) = 5$
- Determine o conjunto dos pontos do plano complexo onde as seguintes funções admitem derivada:
  - $xy - ix$
  - $z^2 - 3z$
  - $z - \bar{z}$
  - $\bar{e}^z$
  - $\text{Im}(z^2)$
- Considere a função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(z) = f(x + iy) = x^2 - y^2 + 2i|xy|$ .
  - Estude a analiticidade de  $f(z)$ .
  - Calcule  $f'(z)$  nos pontos onde  $f$  é analítica.
- Considere a função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por
$$f(z) = f(x + iy) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
  - Mostre que as equações de Cauchy-Riemann são verificadas em  $(x, y) = (0, 0)$ .
  - Verifique, utilizando a definição, que  $f'(0)$  não existe.
  - Porquê que isto não contradiz o Teorema de Cauchy-Riemann?
- Mostre que se  $f$  e  $\bar{f}$  são ambas inteiras, então  $f$  é constante.
- Seja  $A \subset \mathbb{C}$  um aberto e defina  $A^* = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in A\}$ . Se  $f$  é uma função analítica em  $A$  mostre que  $F(z) = \overline{f(\bar{z})}$  é uma função analítica em  $A^*$ .